Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Wintersemester 2023/24

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra I*

Blatt 9

Abgabe: Freitag, den 12. Januar 2024, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

Aufgabe 9.1 *(2+2+2+2 Punkte)*

Eine beliebige Abbildung $f\colon A \to B$ über die Mengen A und B ist *injektiv*, falls für alle $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$ schon $x = y$ gilt. Ferner ist f *surjektiv*, falls für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ existiert sodass $f(a) = b$. Falls f injektiv und surjektiv ist, so ist f *bijektiv*. Für jede bijektive Abbildung $f\colon A \to B$ existiert somit (per Definition) zu jedem $b \in B$ ein eindeutiges $a_b \in A$ mit $f(a_b) = b$. Folglich kann in diesem Fall f die *inverse Abbildung* $f^{-1}\colon B \to A,\ b \mapsto a_b$ zugeordnet werden.

Sei K nun ein Körper, V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $T\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass T genau dann injektiv ist, wenn für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ $(n \in \mathbb{N})$ aus $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist linear unabhängig schon $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ ist linear unabhängig folgt.

(b) Zeigen Sie, dass T genau dann surjektiv ist, wenn für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ $(n \in \mathbb{N})$ aus $V = \operatorname{span}(\{v_1, \ldots, v_n\})$ schon $W = \operatorname{span}(\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\})$ folgt.

(c) Zeigen Sie, dass T genau dann ein Isomorphismus ist, wenn für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ $(n \in \mathbb{N})$ aus $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist eine Basis von V schon $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ ist eine Basis von W folgt.

(d) Zeigen Sie, dass T genau dann ein Isomorphismus ist, wenn T^{-1} ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 9.2 *(3 Punkte)*

Ziel dieser Aufgabe ist es, die Umkehrung der Aussage des Korollar 16.1 zu beweisen: Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_{n\times n}(K)$ invertierbar. Zeigen Sie, dass die Zeilenvektoren von A linear unabhängig sind.

Aufgabe 9.3 *(1+2+1+1 Punkte)*

Entscheiden Sie mit Begründung, ob die folgenden Mengen linear unabhängig sind:

(a) $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ in dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

(b) $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ in dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

(c) $\{(123, \frac{3}{4}), (\cos(\frac{1}{3}), \sin(\frac{7}{13})), (\sqrt{17}, -\frac{50}{49}), (\pi, \frac{3\pi}{177})\}$ in dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

(d) $\{2, 1 + 2x, x^2, 2x^2 + x^3, x + 2x^3\}$ in dem $\mathbb{F}_3$-Vektorraum $\mathbb{F}_3[x]$.

Zusatzaufgabe für Interessierte. *(1+2+1 Bonuspunkte)*

Es bezeichne $+$ und $\cdot$ die übliche Addition und Multiplikation reeller Zahlen.

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $(\mathbb{R}, \cdot, +)$ *ein* $\mathbb{Q}$*-Vektorraum ist. Ferner dürfen Sie ebenfalls ohne Beweis verwenden, dass für jedes* $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ *ein eindeutig bestimmtes* $y \in \mathbb{R}$ *mit* $2^y = x$ *existiert. Wir setzen* $\operatorname{ld}(x) := y$. *Dies ist der* duale Logarithmus *von* x.

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ nun linear abhängig über $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen.

(a) Beweisen Sie die Existenz von $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$, $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{Z}$ nicht alle $z_i = 0$ mit $\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 0$.

(b) Beweisen Sie, dass die Menge $\{\operatorname{ld}(p) \mid p \in \mathbb{P}\}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist.

(c) Folgern Sie, dass $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum keine endliche Basis besitzt.

Zusatzaufgabe für Interessierte. *(4 Bonuspunkte)*

Seien $a, b \in \mathbb{N}_0$ sodass $\operatorname{ggT}(a, b) = 1$ und $n \in \mathbb{N}$ sodass $n \geq ab$. Beweisen Sie die Existenz von geeigneten $x, y \in \mathbb{N}_0$ mit $ax + by = n$.

Das Team der Linearen Algebra I wünscht Ihnen von ganzem Herzen eine Frohe Weihnacht und einen Guten Rutsch ins Jahr 2024!